Eric Goles

UNA ESPECIE DE ZUMBIDO EN LA CABEZA

De la verdad matemática
a la inteligencia artificial

Planeta

Introducción

Nunca he debido tanto a tan pocos.

Inspirado en Winston Churchill

No se trata de otra historia de la matemática, aunque se narran diversas situaciones históricas. Tampoco es un texto para aprender matemática o informática. Mi (muy entusiasta) pretensión es invitarlos a compartir un punto de vista, a que recorramos juntos el asombroso desarrollo de un concepto, el de "verdad matemática", desde las colonias griegas en Asia Menor, hace dos mil seiscientos años, hasta los paradigmas actuales de la inteligencia artificial.

No hablo de asombro con ánimo retórico. De verdad me sorprende (y mucho) cómo una pregunta tan etérea, ociosa en apariencia, "¿qué es la verdad?", condujo a la concepción de una máquina tan concreta como el computador, que ha cambiado radicalmente, para bien y para mal, a la humanidad. Ahí está la ya imprescindible red, la fantasmagórica web, y la fauna que la habita: programas que traducen, reconocen o juegan mejor que nosotros, sus creadores.

Varios de los temas tratados en este libro los expuse por primera vez en un curso de formación general sobre los orígenes de la informática y la complejidad que dicté en la Universidad de Chile, a fines de los noventa. Posteriormente, introduje nuevos tópicos en un curso similar, dictado durante varios semestres en la Universidad Adolfo Ibáñez. Experiencias que, conjuntamente con varias exposiciones sobre el tema y la concepción de mi novela *La conspiración de Babel* (cuyo protagonista, el matemático Kurt Gödel, es uno de los personajes centrales de la historia de la "verdad matemática"), me decidieron, finalmente, a escribir este libro, que también es una suerte de bitácora de mi propio recorrido en estas materias.

Cada uno de los lugares y situaciones descritos en este itinerario están imbricados de muchas maneras con mi quehacer intelectual y matemático. Más aun, en mucho de lo sucedido en los últimos cuarenta años he sido testigo directo, e incluso, en algunos casos, participante. Muy en particular, en el renacer de la "inteligencia artificial conexionista", conocida hoy en día con nombres de fantasía como *machine learning*, *deep learning*, que parecen salidos de la ciencia ficción.

El libro está destinado a un público amplio. En tal sentido, he tratado de evitar ecuaciones y dificultades, digamos, matemáticas. Tal vez los capítulos dedicados al método diagonal de Cantor y aquellos que explican los resultados de Gödel y Turing sean un poco más áridos. Sin embargo, créanme, un poco de buena voluntad, acaso un par de hojas de cuaderno de aritmética, y, por supuesto, paciencia, serán suficientes para comprender lo que estos matemáticos aportaron a la humanidad; entre otras cosas, nada menos que el computador. Las ideas que hay detrás son, como toda intuición genial, simples: Cantor inventando un método para contar conjuntos infinitos que se usaba hace más de cinco mil años, en Mesopotamia, para contar animales; Gödel preguntándose si existirían verdades matemáticas que no se pudieran probar; Turing definiendo qué es un cálculo mecánico, lo que conducirá nada menos que al computador.

El texto va progresando temporalmente desde los griegos hasta la actualidad. Sin embargo, la mayoría de los capítulos admite una lectura más o menos independiente. Los "Andamios", que se ubican al final, corresponden a precisiones, algunas demostraciones (¡para todo público!) y diversas curiosidades que iluminan, aquí y allá, los capítulos. También pueden leerse independientemente del texto principal.

En la concepción y escritura de este libro debo muchísimo, como diría Churchill, a unos pocos. Especial mención y agradecimiento vaya para mi colega Andrés Moreira, cuya lectura de una versión preliminar me hizo sonrojarme (por mi ignorancia), entusiasmarme con su agudeza y emocionarme por su generosidad.

Agradecidos sean también mis colegas de la Universidad Adolfo Ibáñez, Pedro Montealegre y Gonzalo Ruz, quienes con infinita paciencia y cariño me leyeron, comentaron y, no faltaba más, me han soportado durante todo este tiempo.

Agrego también un graaacias (con hartas aes) a Diego Maldonado, posdoctorado, también en mi universidad, que diseñó con gran destreza las imágenes del texto.

Pilar, mereces agradecimientos por muy diversas razones. Entre tantas otras, por tu paciencia, entusiasmo y participación, desde la idea misma de escribir este texto. Tus lecturas, recomendaciones, correcciones y el hecho (en absoluto menor) de "escuchar" mis borradores. Todo aquello fue precioso para mí. Más aun, ¡un fin en sí mismo! Y, bueno, que sean estas páginas las humildes flores que recogí para leerte.

No puedo terminar esta breve descripción sin agradecer a la Universidad Adolfo Ibáñez, que me ha entregado, desde siempre, un excelente ambiente de trabajo y la motivación para seguir haciendo aquello que me da vida: crear.

Agradezco también, cómo si no, a la editorial Planeta y a mi editor, Juan Manuel Silva Barandica.

Y ahora sí, estimadas lectoras y lectores, aquí estoy, listo y bien dispuesto para que comencemos esta travesía.

Santiago, diciembre de 2019

Bitácora de una obsesión 00000

Han pasado algo más de tres décadas y aún recuerdo aquella fría mañana de enero cuando me llevaron a conocer el Cubo. Estaba ahí en la penumbra, intensamente negro, como la columna de basalto de la película *2001: Odisea del espacio* (1968), y en cada una de sus caras titilaban cientos de diminutas luces rojas: sus "neuronas". Quizás por eso lo bautizaron Thinking Machine, un computador masivamente paralelo, uno de los más poderosos del planeta, destinado a resolver problemas de inteligencia artificial.

No era extraño entonces que estuviera en Kendall Square, cerca del Laboratorio de Inteligencia Artificial del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) y que el inventor fuese Danny Hillis, alumno doctoral del mítico Marvin Minsky, especialista en ese dominio.

En los años setenta, con su libro *Perceptrones*, Minsky habría hundido (decían) el intento de concebir una inteligencia mecánica imitando el sistema nervioso. Según él, la inteligencia emergería de la aplicación de reglas lógico-matemáticas. Para profundizar en aquel paradigma fundó el Laboratorio de Inteligencia Artificial, donde me encontraba invitado.

Compartía oficina con el físico inglés Stephen Wolfram[1], conocido por más de una razón: estudió en Eton, frecuentó Oxford, publicó su primer trabajo científico a los quince años, a los veinte se doctoró en Caltech obteniendo casi de inmediato la prestigiosa (y suculenta) beca MacArthur (denominada de los genios) y una posición en Princeton.

Una vez por semana venía desde Nueva Jersey para programar en el Cubo modelos de física de fluidos. Aunque lo había conocido hacía un par de años, no dejaba de ser intimidante tenerlo en el escritorio enfrente de mí. Aun así, me atreví a preguntarle qué opinaba sobre una conjetura que revoloteaba en mi cabeza. Se sacudió el chaleco desparramando una cantidad apreciable de cáscaras de maní y,

1. Creador del software Mathematica y autor del libro *A new kind of science* (2004).

acto seguido, me pidió que me acercara al terminal. Nunca antes, ni después, he visto programar con tal destreza y rapidez. Si unos pisos más arriba el profesor Minsky interpretaba en su oficina con notable excelencia a Bach en un piano de cola blanco, ahí, a mi lado, se revelaba un verdadero Mozart.

En no más de media hora el Cubo produjo gráficos, figuras y patrones que se desperdigaban por toda la pantalla. Entusiasmado, le pedí que por favor guardara, que imprimiera todo eso: ahí estaban los insumos necesarios para que hiciéramos una demostración matemática de la conjetura. Me miró como quien observa a un nativo que jamás hubiese abandonado la selva amazónica. ¿Demostración?, pero si ahí estaba la prueba frente a nuestros ojos, entregada por el Cubo. ¿Para qué más?

Me sentí incómodo, perplejo, un poco mareado. Yo había sido aleccionado y entrenado, como ha ocurrido con todo matemático desde el tiempo de los griegos, en que una afirmación matemática se demuestra o se refuta mediante un contraejemplo. Una sentencia matemática es verdad si y solo si es posible deducirla desde los axiomas y postulados siguiendo los pasos de la lógica. En tal sentido, aunque lo que observaba en la pantalla era coherente con mi conjetura, nada aseguraba que el programa fuese correcto, que abarcara todos los casos posibles. No, no se trataba de una demostración. Sin embargo, para él era suficiente. La verdad estaba ahí, en lo que entregaba el computador, y no había nada más que decir.

¿Una nueva clase de ciencia, como él mismo afirmaría y fundamentaría un par de décadas más tarde? La verdad como producto de un programa, de la actividad ciega de una máquina: la mecanización del raciocinio. Poderosa idea que, desde aquel día de invierno, hace ya más de tres décadas, no me ha querido abandonar: la búsqueda de los fundamentos mecánicos de la verdad, de una mente mecánica. Este libro es una bitácora de tan singular obsesión.

La construcción de la verdad 00001

En ese entonces se hablaba un solo idioma en toda la tierra. Al emigrar al oriente, la gente encontró una llanura en la región de Sinar, y allí se asentaron. Un día se dijeron unos a otros: "Vamos a hacer ladrillos, y a cocerlos al fuego". Fue así como usaron ladrillos en vez de piedras, y asfalto en vez de mezcla. Luego dijeron: "Construyamos una ciudad con una torre que llegue hasta el cielo. De ese modo nos haremos famosos y evitaremos ser dispersados por toda la tierra" (…) "Pero todos forman un solo pueblo y hablan un solo idioma; esto es solo el comienzo de sus obras, y todo lo que se propongan lo podrán lograr. Será mejor que bajemos a confundir su idioma, para que ya no se entiendan entre ellos mismos". De esta manera el Señor los dispersó desde allí por toda la tierra, y por lo tanto dejaron de construir la ciudad. Por eso a la ciudad se le llamó Babel, porque fue allí donde el Señor confundió el idioma de toda la gente de la tierra, y de donde los dispersó por todo el mundo.

Génesis 11:1-9.

En una ocasión me llamó un periodista para contarme que habían demostrado la existencia de Dios con un computador. Quería mi opinión.

—¿De verdad? —le pregunté, algo irónico.

—Claro que sí, seguro. Los que hicieron el programa son de una universidad norteamericana —respondió.

Recuerdo este episodio pues en la "noticia" se conjugaban dos tipos de afirmaciones, una verdad de autoridad, basada en el (supuesto) prestigio de una universidad y en un país específico. La otra, más sutil y coherente con este libro, aludía a una "demostración": la verdad de la existencia divina asociada a una prueba. Una suerte de verdad "razonada".

Evidentemente, hay otras clases de verdades: "el fuego quema", "los objetos caen", "la gente se muere" son, sin duda, proposiciones verdaderas. Claro que sí, han sido verificadas innumerables veces. Otras afirmaciones son falsas. "El Sol gira en torno a la Tierra" es falsa; o "Llueve, está lloviendo siempre, siempre está lloviendo", como afirma el poeta Pablo de Rokha, aparte de ser un bello énfasis poético, también es falsa: a veces, simplemente, no llueve.

Casi todas las afirmaciones anteriores tienen algo en común: son fruto de la experiencia, o bien, directamente experimentales. En ambos casos se trata de poner el dedo en la llaga. Como santo Tomás, ver (tocar) para creer. Aunque no siempre podemos confiar solo en los sentidos. Si así lo hiciéramos, tendríamos que concluir, como afirman los terraplanistas, que el mundo es plano. Para determinar la redondez de nuestra vapuleada y única morada, desde la Grecia clásica hasta el presente hemos apelado al raciocinio que entre múltiples asombros ha contribuido a la extensión de nuestros sentidos mediante instrumentos.

Sin embargo, en este libro, menos que conspiraciones o experimentos, compartiré con ustedes los desarrollos, inquietudes y consecuencias en torno a un tipo especial de enunciados: aquellos del discurso, relacionados con conceptos que muy a menudo tienen escasa o ninguna relación con la naturaleza. Por ejemplo, "la belleza es un adjetivo" es una verdad circunscrita a la gramática.

Pero si de idiomas se trata, desde tiempos inmemoriales hemos aspirado a un lenguaje universal y perfecto que permita la comprensión absoluta y que, según el mito bíblico, llevó a la construcción de la torre de Babel. Soberbia inaceptable para la divinidad, que en menos de media página del Génesis nos condenó a la confusión y dispersión de las lenguas. Sin embargo, nostálgicos de aquella comunión perdida, insistimos en la búsqueda (o recuperación) de una lengua perfecta que permita dirimir divergencias y desacuerdos. Así, incluso en la actualidad, cuando discutimos (sin insultarnos o irnos a las manos) pretendemos que, con argumentos razonables, más allá de toda duda, lo que afirmamos sea verdad. La razón ineludiblemente asociada a la verdad; su búsqueda como un modo de zanjar discusiones. Tremendo anhelo o desmedida arrogancia, imposible quizás: pretender que mediante un proceso de raciocinio sea posible decidir si una afirmación es verdadera o falsa.

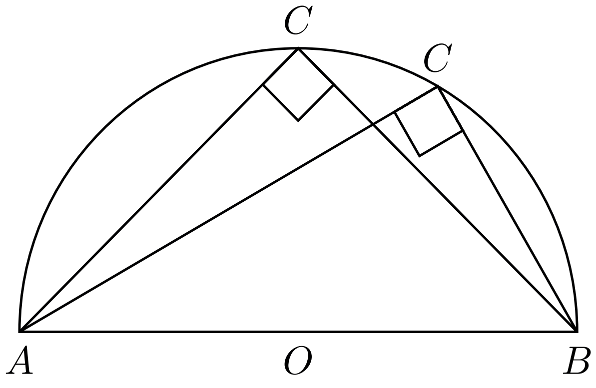
Y todo esto relacionado con la lengua. La misma que permitió escribir *El Quijote*, declararnos a nuestra personal Dulcinea o afirmar que "Dios existe", sentencia que bien podría llevar a una ardua discusión en la que cada cual defiende su parecer y, a menos que se fije un protocolo de razonamiento y un conjunto de conceptos en los que que todos estén de acuerdo, no conducirá a ninguna parte. De aquí se desprende que para buscar la verdad es necesario definir principios comunes y una metodología de raciocinio.

Búsqueda que nos obsesiona desde la Grecia clásica. Pensemos, por ejemplo, en la retórica o el arte del debate desarrollado por los sofistas en el siglo v a. C. o en el modo de argumentar de su contemporáneo, Sócrates, quien concluyó, irónicamente, que solo sabía que nada sabía. En realidad, este tema puede ser de vida o muerte. A Sócrates le significó un postrero aperitivo de cicuta. Y no es el único caso de tan abrupto final, sino que son innumerables los malogrados por estas indagaciones: Giordano Bruno quemado en la hoguera; Galileo con tarjeta amarilla y arresto domiciliario; Ramón Llull (cuya obra comentaremos más adelante), acusado de herejía; Baruch Spinoza, expulsado de la comunidad judía de Ámsterdam. Entonces podemos precisar lo que entenderemos por verdad: una sentencia es verdadera si, a partir de un conjunto de principios aceptados por todos (postulados), y mediante un procedimiento irrefutable de raciocinio, llegamos a tal conclusión.

Por "procedimiento" entiendo un conjunto de normas que indican cómo aplicar las reglas del juego (definiciones, axiomas, principios o postulados). Es importante insistir en que debe haber una suerte de pacto en torno a las reglas, ¡asunto capital! Para ilustrar su importancia supongamos que estuviese dispuesto (en muy imperfecto subjuntivo) a discutir con un terraplanista, quien no reconoce la existencia de satélites ni estaciones espaciales. Por ello, no podré argumentar la redondez de la Tierra aludiendo a imágenes satelitales o al testimonio de astronautas. ¡Sin principios comunes no hay discusión posible! Sin reglas comunes nos encontraremos en una suerte de solipsismo: nada existe más allá de mí, de mis sentidos directos. Ver, tocar, oler, probar, oír para creer. La verdad asumida como un asunto exclusivamente personal, como un desquiciado constructo lógico, individual e inexpugnable.

Por el contrario, el mundo griego, en un tiempo muy corto para la magnitud de su aporte (650 hasta el 300 a. C.), desarrolló una manera de razonar, en gran parte todavía vigente, necesaria para comprender la naturaleza e incluso nuestro comportamiento social (ética, política, etcétera). Este procedimiento consistió en la descripción y desarrollo de un modo de interrogarnos sobre la verdad y cómo alcanzarla. Método cuya esencia se encuentra en el progreso de la lógica y la matemática que comienza en las colonias jónicas de Asia Menor en el siglo VI a. C., que se trasladó posteriormente al sur de Italia, pasó por Atenas y culminó en Alejandría con la obra de Euclides *Los elementos*, alrededor de tres siglos más tarde.

Uno de los precursores de la aventura del raciocinio fue Tales (624-546 a. C.), filósofo y matemático oriundo de Mileto, en las riberas mediterráneas de Asia Menor. A él se le atribuyen los primeros teoremas geométricos (probablemente sin demostración). Habría afirmado que el diámetro divide un círculo en dos partes iguales y que un triángulo, con dos vértices sobre los extremos del diámetro y el tercero sobre la misma circunferencia, es necesariamente un triángulo rectángulo y que el ángulo exterior a los dos vértices sobre el diámetro es de 90°.

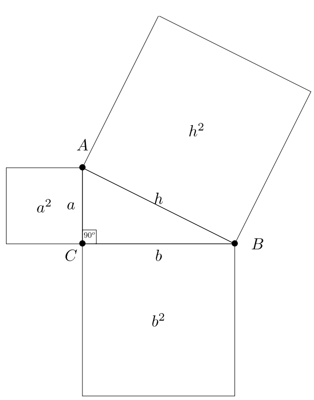


Teorema de Tales: el ángulo ACB de cualquier triángulo con vértices en A y B y C es recto.

Como hemos recalcado en las páginas previas, para comprender estos enunciados se dan por conocidos y aceptados una serie de principios y definiciones: punto, línea recta, diámetro, círculo, ángulo recto, triángulo, vértice, semejanza de figuras geométricas, igualdad entre dos magnitudes y, por supuesto, las reglas autorizadas de deducción lógica.

Adelantémonos unos cincuenta años y naveguemos desde las costas del Asia Menor hasta el sur de Italia, donde se desarrolla la escuela (y secta secreta) pitagórica, denominada así en honor a su fundador, el filósofo y matemático Pitágoras (569-475 a. C.). Hasta acá nos hemos referido a la matemática griega solo como geometría. Los pitagóricos introdujeron un nuevo ingrediente: los números, pero no olvidaron la geometría, sino que más bien la complementaron. Para ellos los números estaban asociados a formas y magnitudes y, de este modo, eran una representación de objetos geométricos. Entendían por números los enteros naturales, aquellos que podemos contar, el 1, 2, 3, 4… y las fracciones (o razones), tales como 1/2, 2/3, 6/7, 3/2, 32/987.

Sin duda, el resultado más conocido atribuido a la escuela es el teorema de Pitágoras, que relaciona justamente números con una figura geométrica, el triángulo rectángulo: "La suma de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de su hipotenusa". Esta propiedad es conocida al menos desde la cultura mesopotámica; sin embargo, con los pitagóricos alcanza el nivel fundamental de una abstracción, de un teorema[2].



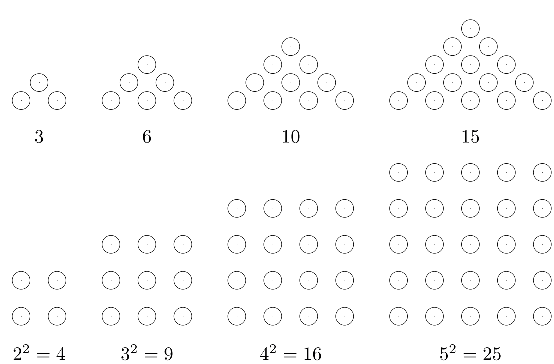
Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = h^2$.

2. No hay evidencia de que los pitagóricos no lo demostraran, pero la primera demostración formal aparece luego, en *Los elementos* de Euclides.

Geometría y números, conceptos imbricados unos con otros, como lo testimonia el historiador Diógenes Laercio (siglo III d. C.) en relación con el pensamiento pitagórico:

> De los números provienen los puntos; de estos, las líneas; de las líneas, las figuras planas; de las figuras planas, las sólidas, y de estas los cuerpos sólidos, de los cuales constan los cuatro elementos, fuego, agua, tierra y aire, que trascienden y giran por todas las cosas, y de ellos se engendra el mundo animado, intelectual, esférico, que abraza en medio a la tierra, también esférica y habitada en todo su alrededor[3].

Menos conocidas, aunque fundamentales, son las relaciones que establecieron entre números enteros y figuras geométricas simples. Por ejemplo, el número 3 se puede representar mediante piedrecillas como un triángulo; lo mismo ocurre con el 6, el 10, el 15 y muchos otros (ver figura). En realidad, existen infinitos números triangulares (que se representan por triángulos de guijarros). Análogamente, los números 4, 9, 16, 25 se representan mediante cuadrados de lados 2, 3, 4 y 5, respectivamente, y también existe una infinidad de ellos. Todo esto parece ingenuo, no obstante, es el primer paso hacia una equivalencia que culminará con la relación general que establecerá más de dos mil doscientos años más tarde, solo en el siglo XVII, el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), creador de la geometría analítica.

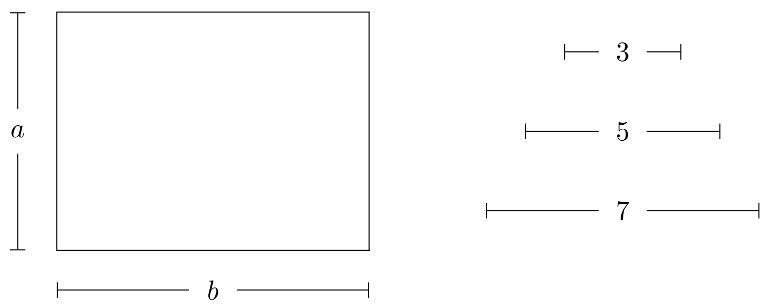


Números triangulares y cuadráticos.

---

3. No está de más observar que ya entonces el terraplanismo se batía en retirada.

Sin embargo, falta algo fundamental. Volvamos a la representación geométrica y consideremos la noción de "divisibilidad". Los pitagóricos se percataron de que si un número tiene un divisor entero *a*, entonces se escribe como el producto *axb*, donde *b* es el otro divisor. Por ejemplo, 8 es divisible por 2, pues 8 = 2 x 4 (4 sería el otro divisor); de manera análoga, 9 no es divisible por 2, pues no puede representarse como el producto de 2 por otro entero.



Rectángulo de lados *a*, *b* y área *axb*. A la derecha se dibujan líneas rectas: paralelepípedos sin espesor: números primos.

La constatación de que un número producto de otros dos, *axb*, puede representarse como un rectángulo de lados *a* y *b*, parece trivial; sin embargo, casi de inmediato se hace inquietante: el 2 no puede dibujarse como un rectángulo con lados mayores que la unidad, tampoco el 3, ni el 5, ni el 7. Se trata de números sin espesor, solo representables por una hilera de guijarros. Números sin divisores, aparte de la unidad y de sí mismos. Además, los hay cada vez más grandes; también tienen esta propiedad el 11, el 13 y el 17 y parecen no agotarse, debían ser infinitos, conjeturaron. Muy probablemente, de este modo los números primos hicieron su presentación en sociedad.

Y ni siquiera estos asombros agotan el aporte pitagórico. Su contribución es muchísimo más fundamental. Para ellos los números son, literalmente, los ingredientes del universo: la naturaleza está hecha de números. Estos serían los átomos o ladrillos elementales de la materia. Esta intuición provenía de la observación del cielo nocturno, donde las formas geométricas correspondían a constelaciones formadas por estrellas que se podían contar (pequeños guijarros brillantes) y, por supuesto, de la música; del descubrimiento de que los sonidos están estrechamente relacionados con las longitudes de las cuerdas de sus instrumentos. Razones numéricas no ajenas a aquellas de las distancias entre el Sol, la Luna y los planetas. Entonces, astros y números eran una misma cosa, necesariamente el cosmos era una verdadera armonía. El mismo Aristóteles sostuvo, refiriéndose a los pitagóricos, que aquella música celestial no la escuchamos ya sea porque está allí desde siempre y estábamos acostumbrados, o porque el sonido es tan potente que escapa a nuestra percepción.

Pero si los números son los constituyentes del cosmos, aun así son demasiados para la comprensión humana. ¿No habría una cantidad más reducida, de modo que nuestras mentes finitas puedan abarcar la aparente infinitud de todo lo que existe? Y, claro que sí: ahí estaban los números primos, pues los pitagóricos también descubrieron el teorema fundamental de la aritmética:

“Cualquier número natural se puede escribir como producto de factores primos”.

Por ejemplo, 10 = 2 x 5; 51 = 3 x 17; 325 = 5 x 5 x 13. Juntando estos extraordinarios resultados con la hipótesis pitagórica de que el universo está hecho de números, es inevitable pensar que los ladrillos elementales del cosmos, aparte de la unidad, eran para ellos los números primos.

No está claro si la infinitud de los primos y el teorema anterior fueron demostrados (en el sentido que hemos descrito anteriormente: ocupando reglas) por la escuela pitagórica. Es probable que en los primeros tiempos solo fuesen conjeturas sustentadas por intuiciones y ejemplos. Las pruebas rigurosas, de espeluznante belleza, aparecerán en *Los elementos* de Euclides, en el siglo III a. C.

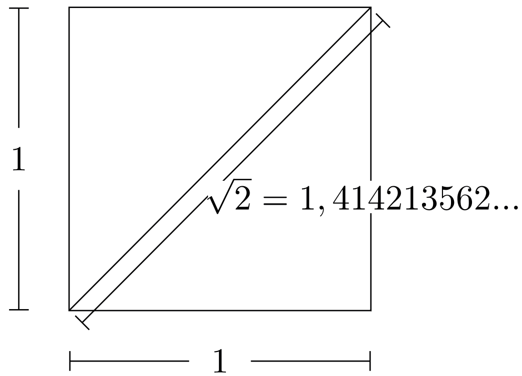
En la actualidad, casi dos mil quinientos años más tarde, los números primos no han agotado sus misterios. Además, son imprescindibles. De hecho, fueron un ingrediente esencial para que el matemático austriaco Kurt Gödel, mediante la codificación de cualquier sentencia matemática como un número, construido también a partir de primos, demostrara en 1930 que la matemática es, de algún modo, inagotable[4].

También son prácticamente insoslayables en criptografía. Baste señalar que la mayoría de las transacciones bancarias a través de la red se codifican apelando al clásico teorema pitagórico de que todo número entero se escribe como producto de primos. Aunque debemos agregar un nuevo ingrediente: los griegos no podían saber (no había computadores) cuán inmanejables son estos guarismos. Incluso en la actualidad no se conocen procedimientos computacionales eficientes para determinar los factores primos. Para un número suficientemente grande, cualquier computador actual demoraría siglos en determinar sus factores primos. Aprovechando este hecho, la información que circula en la red se codifica, por ejemplo, mediante el producto de dos grandes números primos, de modo que el emisor encripta la información utilizando el número completo y el receptor la decodifica utilizando el factor que conoce. Así, la información que circula por la red está cifrada considerando todo el número (el producto de ambos factores), para el cual ningún computador podrá determinar en un tiempo razonable su descomposición en factores primos. Al llegar a destino, le bastará al receptor dividir por el factor primo conocido para leer el mensaje.

La escuela pitagórica proponía una visión de mundo basada en magnitudes expresables como enteros o fracciones. No obstante, como tantas teorías que se han desarrollado a lo largo de la historia, este modelo entró en contradicción con su hipótesis fundamental (una matemática hecha solo de números enteros y fracciones) cuando uno de sus miembros descubrió, no sabemos si feliz o aterrorizado, que la diagonal de un cuadrado de lado uno era inconmensurable (hoy denominamos a ese número raíz de dos: $\sqrt{2}$). Cifra impensada e impensable, imposible de expresarse como una fracción, como la razón entre dos cuerdas: se trataba de otra música, aparentemente ajena al concierto celeste.

---

4. Como diría Terminator: “I’ll be back”.



Cuadrado de lado unitario y su diagonal.
De acuerdo al teorema de Pitágoras, $h^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow h^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}$.